809. Homologiegruppe ト isomorph ナ Homotopiegruppe ヲ持ツ Komplex ニ就イテ

小松 醇郎（阪大）

Komplex K^n ノ Zyklus ガ凡テ Sphäre 又ハ Sphärisch[1] デアルコトヲ何カデ Charakterise 出来ナイモノカ? ト云フ問題ガ出発デアル。斯様ナ問題ヲ提出シタ理由ハ，Zyklus ガ凡テ Sphäre デアル Komplex ハ一ツノ著シイ性質ヲ持ツカラデアル。ソレハ斯様ナ K^n ノ任意ノ Teilkomplex K^r ノ S^r ヘノ normale Abbildung ハ常ニ K^n マデ erweitern 出来ル。

コノ逆ガ成立スルナラバ此ノ性質デ Charakterise 出来ル理デアルガソウハ行カナイラシイ。

1) Sphäre ト等シイ Homotopie Typus ヲ持ツ Komplex ノ意味デ使フ。

整係數ノHomologiegruppeガHomotopiegruppeトisomorph[2)]ナラバZyklusハスベテSphäreノBildト考ヘラレルカラ上ノ性質ハ成立スルノデハナイカト想像サレル、コレハ以下証明スル如ク肯定サレタノデアルガ今度ハHomologiegruppeトHomotopiegruppeトisomorphナKomplexノZyklusハ凡ベテSphärischデアルカ？ト云フ問題モ生ズル．此ノ問題ガ肯定サレルナラバ以下ノ証明ハtrivialニナル理デアル。

HomotopiegruppeノHomologiegruppeノ中ヘノ對應 Θ.

Homotopiegruppe $\pi_i(K^n)$ ノ一ツノ元 α ハ S^i (Sphäre) ノ Bild．從ツテ i 次元Homologiegruppeノ一ツノZyklus Z^i ト考ヘラレル．コノ對應 $\alpha \longrightarrow Z^i$ ヲ Θ デ表ハス、Θ ハ homomorph in デアル。

定理．Komplex K^n ハ對應 Θ ガ常ニ isomorph auf デアル．r 次元Teilkomplex K^r ノ S^r ヘノ normal abbildung[3)] f ハ常ニ K^n 迄 erweitern 出來ル。

---

2) 何等カノ對應デisomorphト云フノデハナク或ル定マツタ對應デisomorphト云フノデアル。

3) ..... ハ次頁ヘ .....

証明. $f: K^r \longrightarrow S^r$ が normal、従ッテ各 $(r+1)$ 次元単体 T^{r+1} マデ erweitern 出来ル. 従ッテ $(r+2)$ 次元 0-Zyklus (Hindernis) f^{r+2} が出来ル.
即チ

$$\dot{T}_i^{r+2} \longrightarrow S^r : \alpha_i \in \pi_{r+1}(S^r)$$

ヨリ

$$f^{r+2}(T_i^{r+2}) = \alpha_i .$$

今 $B_u^{r+2}(K^n, \mathfrak{G})$ ノベッチ数 b, Torsionszahl $p_1, \cdots\cdots, p_j$ トスル. 別ニ $b+j$ 個ノ $(r+2)$-Sphären ヲトリ一点デ Zusammenhängend ナラシメル. ソノ内 j 個ノ Sphären ハ夫々 $p_1, \cdots\cdots, p_j$ 回加ヘレバ beranden スルヤウニ $(r+3)$ 次元 Polyeder ヲ作ル[4]. 此ノ Komplex ヲ $\overline{K}^{r+3}$ トスレバ

$$B_u^{r+2}(K^n, \mathfrak{G}) \approx B_u^{r+2}(\overline{K}^{r+3}, \mathfrak{G}).$$

サテ $B_u^{r+2}(K^n, \mathfrak{G})$ ノ上ノ Basis ヲ作ル $b+j$ 個ノ Zyklen ハ K^n ノ仮定カラ凡テ Sphärenbild ヲトレル. 従ッテ $\overline{K}^{r+3}$ ノ Basis ヲナス $b+j$ 個ノ Sphären ヲ Urbild トシテ連続変換ヲ作ル. ソノ際 Torsionszahl p_j ノ Zyklus Z_j ニハ $\overline{K}^{r+3}$ ノ Torsionszahl p_j

---

3) K^n デ beranden スル Zyklus Z^r ハ凡テ f ニヨッテ Abbildungsgrad 0 ニ移ッテ居ルモノ. 係数群ハ整数.

4) 是ハ常ニ可能. $(r+3)$ 次元 Vollkugel ヲ p_j 回回転シソノ表面上デダケ移ッタ点ヲ identifizieren スレバ良イ.

ノ Sphäre カラ移ルヤウニ作ル. コノ変換ハ $\overline{K}^{r+3}$ 全体ニ erweitern 出来ル. Z_j ハ Homotopiegruppe ノ元トシテモ P_j 倍スレバ 0. 即チ homotop 0 ナノダカラ是ハ出来ル。

此ノ $\overline{K}^{r+3}$ ヲ凡テノ次元 r ニツキ作リ加ヘタ Komplex ヲ $\overline{K}^n$ トスル。

$\overline{K}^n$ ノ Zyklus ハ凡テ Sphäre デアリ、且ツ整係数ノベッチ群ヲ isomorph ニ對應スルヤウナ連続変換

$$\varphi(\overline{K}^n) \subset K^n$$

が作レタ. 操作カラ分ルヤウニベッチ群ハ又任意ノ $\mathfrak{G}_m$ ヲ係数トシテモ isomorph auf デアル。

$$B_u^{r+2}(K^n, \mathfrak{G}_m) \approx B_u^{r+2}(\overline{K}^n, \mathfrak{G}_m)$$

従ッテ任意ノアーベル群ヲ係数トシテモ isomorph auf デアル。

P_1 ヲ mod. 1 デ reduzieren シタ実数群トシ之ニ関シテ $\pi^{r+1}(S^r)$ ノ Charakterengruppe ヲ $\pi^{r+1}(S^r)^*$ ト表ス。

$$B_u^{r+2}(K^n, \pi^{r+1}(S^r)^*) \approx B_u^{r+2}(\overline{K}^n, \pi^{r+1}(S^r)^*)$$

従ッテ又 0-Betti 群ニ関シテモ

$$B_0^{r+2}(K^n, \pi^{r+1}(S^r)) \approx B_0^{r+2}(K^n, \pi^{r+1}(S^r))$$

今 $\overline{K}^n \xrightarrow{\varphi} K^n$ ヲ Simpliziale Abbildung トシ $\overline{K}^n$ ノ中デ凡テノ n 次元 Simplex カラ成ル Teilkomplex ヲ $\overline{\overline{K}}^n$ ($\overline{K}^n$ トハ異ル) トスレバ

$\varphi(\overline{K}^r) \subset K^r$

$f: K^r \longrightarrow S^r$ ガ normal ナラバ

$f\varphi: \overline{\overline{K}}^r \longrightarrow S^r$ ハ又 normal トナル．從ッテ又 $\overline{K}^n$ ニテ $(r+2)$ 次元 0-Zyklus (Hindernis) $\overline{f}^{r+2}$ ガ生ズル。

此ノ $\overline{f}^{r+2}$ ハ Simpliziale Abbildung φ: $\overline{\overline{K}}^{r+2} \rightarrow K^{r+2}$ ニヨッテ，K^{r+2} ノ 0-Zyklus f^{r+2} ニ對應シタモノデアル．

$$\varphi: f^{r+2} \longrightarrow \overline{f}^{r+2}$$

然ルニ $\overline{K}^n$ ノ oberer Zyklus (Hindernis) $\overline{f}^{r+2} \sim 0$ デアル．$\overline{K}^n$ ノ Zyklus 凡テ Sphäre デアルカラ．

從ッテ φ ニヨル 0-Betti 群ノ對應ガ isomorph デアッタ．

$$B_0^{r+2}(K^n, \pi^{r+1}(S^r)) \approx B_0^{r+2}(\overline{K}^n, \pi^{r+1}(S^r)).$$

故ニ $\overline{f}^{r+2} \sim 0$ ナラ $f^{r+2} \sim 0$

即チ K^n ノ $K^r \xrightarrow{f} S^r$ ガ normal Abbildung ナラバ Hindernis $f^{r+2} \sim 0$.

f ノ K^{r+1} 迄ノ Erweiterung ヲ適當ニトレバ

$$f^{r+2} \equiv 0$$

從ッテ f ハ K^{r+2} 迄 Erweiterung 出來ル．

以上

此ノ定理ノ特別ノ場合，例ヘバ K^n ヲ Poincaré ノ集合体，或ヒハモ少シ一般ニシテ S^n ト等シイ Homotopietyzus ヲ持ツ Komplex トスレバ矢張リ成立スル。

定理。 球面 S^n ト等シイ Homotopietyzus ヲ持ツ Komplex K^n ノ r 次元 Teilkomplex K^r トスレバ任意ノ normale Abbildung $f = K^r \to S^r$ ハ K^n 全体ニ Erweiterung 出来ル。